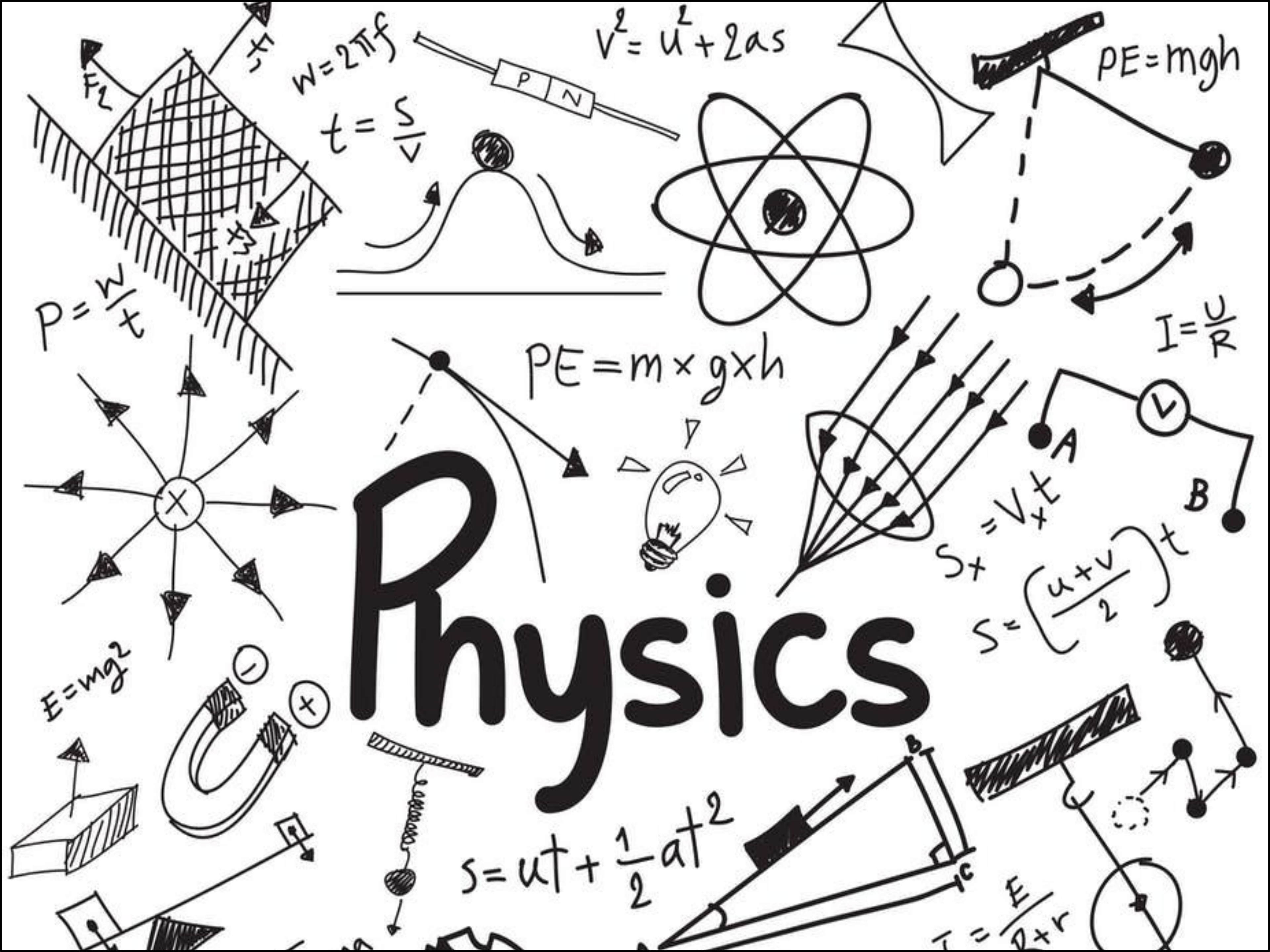

Physics
F_2
$w=2\pi f$
P N
$v^2=u^2+2as$
PE=mgh
$t=\frac{s}{v}$
$P=\frac{w}{t}$
PE=m×g×h
$I=\frac{U}{R}$
A
B
$S=V \times t$
$S=\left(\frac{u+v}{2}\right)t$
$E=mg^2$
$s=ut+\frac{1}{2}at^2$
B
C
$I=\frac{E}{R+r}$

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει <u>**σεβασμός**</u> στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (επανάληψη…)

- **Ενέργεια**: αφηρημένη έννοια
  - Ποσότητα που σχετίζεται με την κατάσταση ενός ή περισσότερων σωμάτων → **αριθμός**
  - Ευμετάβλητη: **αλλάζει συνεχώς μορφές**
- **Σύστημα**: ένα ή περισσότερα σώματα ή/και κομμάτι ενός χώρου
- **Έργο**: τρόπος μεταφοράς ενέργειας **προς** ή **από** ένα σύστημα μέσω εξωτερικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα
  - Διατύπωση: «η δύναμη **παράγει** έργο στο σύστημα»
- **Ορισμός έργου δύναμης σταθερού μέτρου**:

$$W = F\Delta x\cos(\theta)$$

$W > 0$ ή $W < 0$!!!

  - Μονάδα μέτρησης: Joule (J)

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$\boldsymbol{W} \equiv \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$$

  μοιάζει γνωστή…

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται

εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})$$

- Άρα το έργο ***W*** μπορεί να γραφεί ως $\vec{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}$ **!**

Ενέργεια Συστήματος

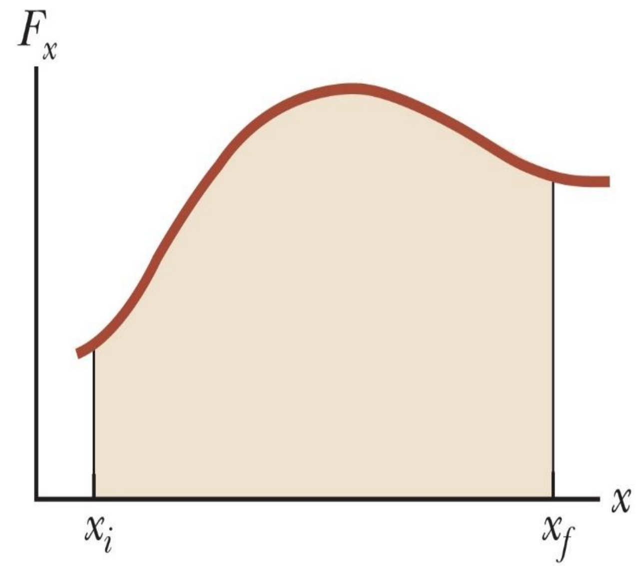
- **Παράδειγμα**
- Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = 2.0\vec{\boldsymbol{\imath}} + 3.0\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ m λόγω μιας **σταθερής** δύναμης $\vec{F} = 5.0\vec{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ N που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

Είναι

$$
\begin{aligned}
W_F &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \\
&= (5\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) \\
&= 10\vec{i}\cdot\vec{i} + 15\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}}^{\,0} + 4\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}}^{\,0} + 6\vec{j}\cdot\vec{j} \\
&= 10\vec{i}\cdot\vec{i} + 6\vec{j}\cdot\vec{j} \\
&= 10 + 6 = 16 \text{ J}
\end{aligned}
$$

Ενέργεια Συστήματος

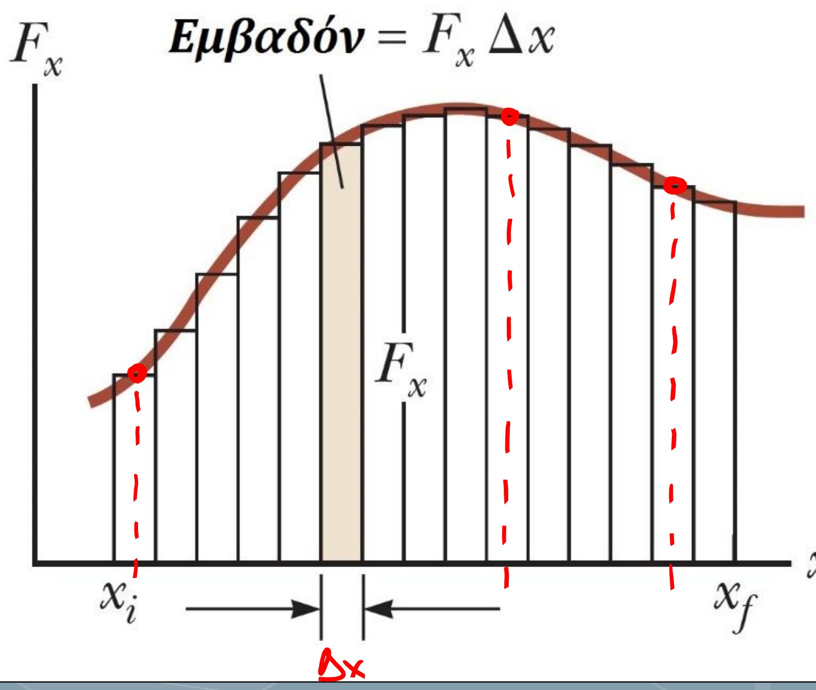
- Η συζήτησή μας αφορούσε έργο υπό **σταθερή δύναμη**
  - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι **μεταβαλλόμενη** αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!
  - Ας πούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της – τι συμβαίνει τότε?
- Παράδειγμα:
  - Η x-συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση



Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

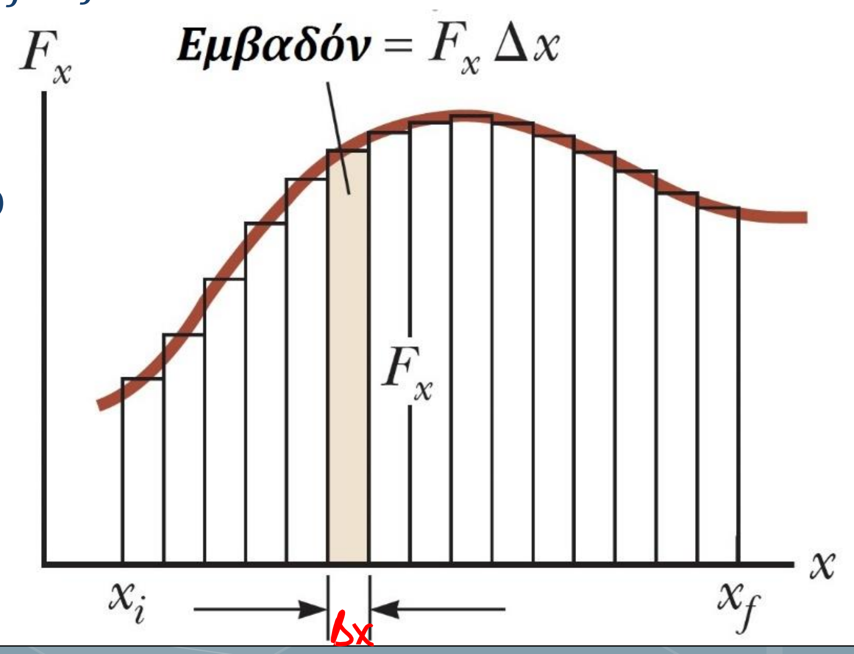
- Προσέγγιση:
  - Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx
  - Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j, που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραλληλλογράμμου



Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

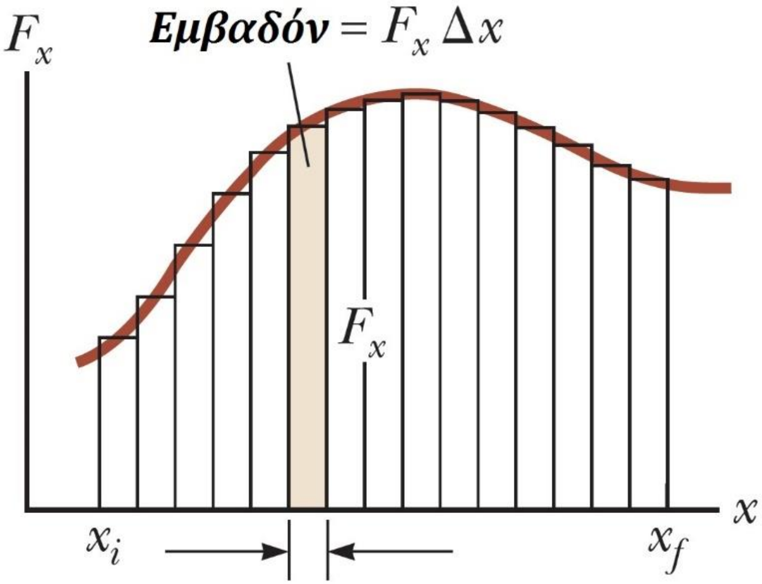
- Παράδειγμα:
  - Το συνολικό έργο είναι $\approx \sum_j W_j$
  - Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \to 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!

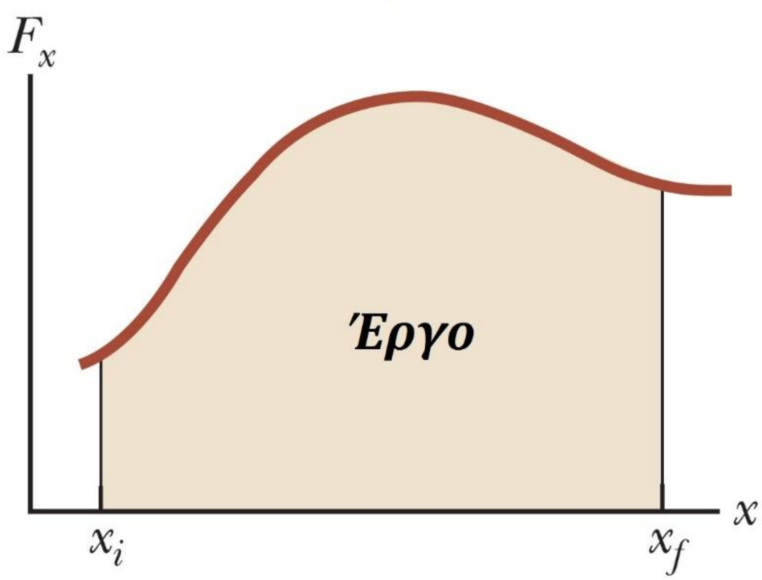


Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cos(0)\, dx = \int \vec{F}_x \cdot d\vec{x}$$



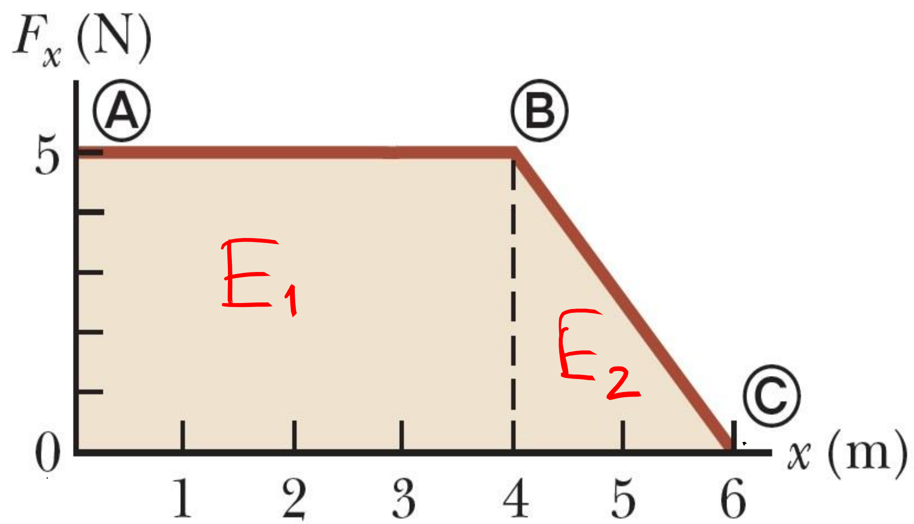


Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από $x = 0$ ως $x = 6$ m.

Θα είναι

$$W_{F_x} = E_1 + E_2 = 4 \cdot 5 + \frac{10}{2} = 20 + 5 = 25 \text{ J}$$



Ενέργεια Συστήματος

Homework! ☺

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Άλλη λύση: ("κακή")

$$W = \int_0^6 F_x\,dx = \int_0^4 5\,dx + \int_4^6 \left(-\frac{5}{2}x + 15\right)dx$$

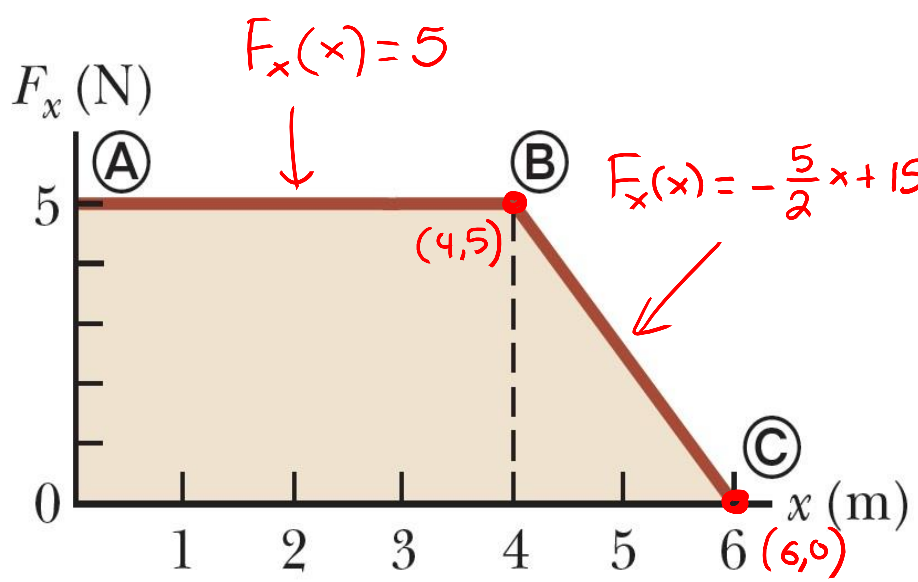
$$= 5x\Big|_0^4 + \left(-\frac{5}{4}x^2 + 15x\right)\Big|_4^6$$

$$= 20 - 0 + \left(-45 + 90 - (-20 + 60)\right)$$

$$= 20 + (45 - 40)$$

$$= 20 + 5$$

$$= 25\ J$$



Ενέργεια Συστήματος

- Ας μελετήσουμε μια πολύ… δημοφιλή δύναμη **<u>μεταβαλλόμενου μέτρου</u>**

- Θα κατανοήσουμε τη λειτουργία της και θα υπολογίσουμε το έργο που **παράγει** πάνω σε ένα σύστημα…
  - …που θα καθορίσουμε **εμείς** ποιο θα είναι

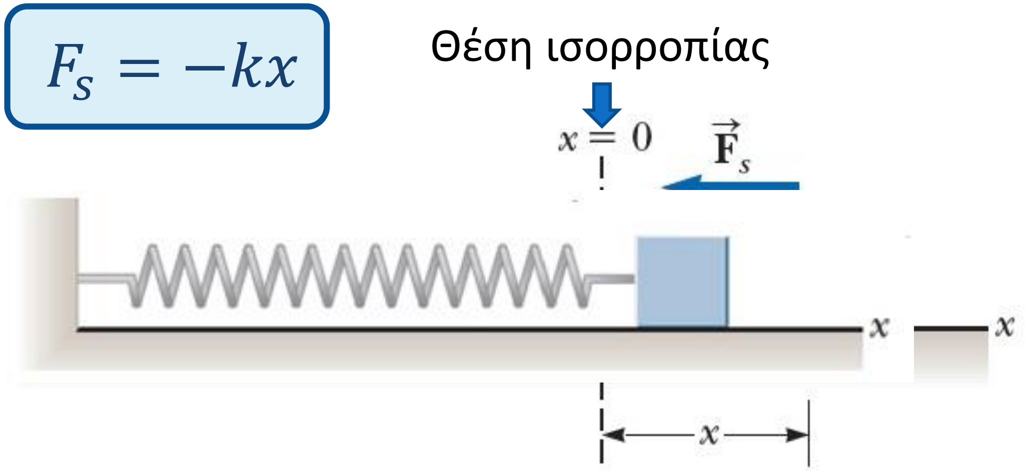
- Ταυτόχρονα, θα διατυπώσουμε κλειστούς τύπους για το έργο που σχετίζεται με αυτή τη δύναμη

- Τέλος, θα δούμε τη σχέση του έργου με τις αντίστοιχες ενέργειες

Ενέργεια Συστήματος

- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Σύστημα = {σώμα} – δεμένο στο ελατήριο
  - Δύναμη $\vec{F}_s$ εγείρεται επάνω στο σώμα από το ελατήριο όταν το τελευταίο εκτείνεται ή συμπιέζεται
  - Η δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με τη απομάκρυνση από τη **θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους)**
  - Δύναμη ελατηρίου στο σώμα: ***Νόμος του Hooke***

$$\boxed{F_s = -kx}$$



  - Ελατήρια: **Αποθηκεύουν** ή **απορροφούν** ενέργεια!

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

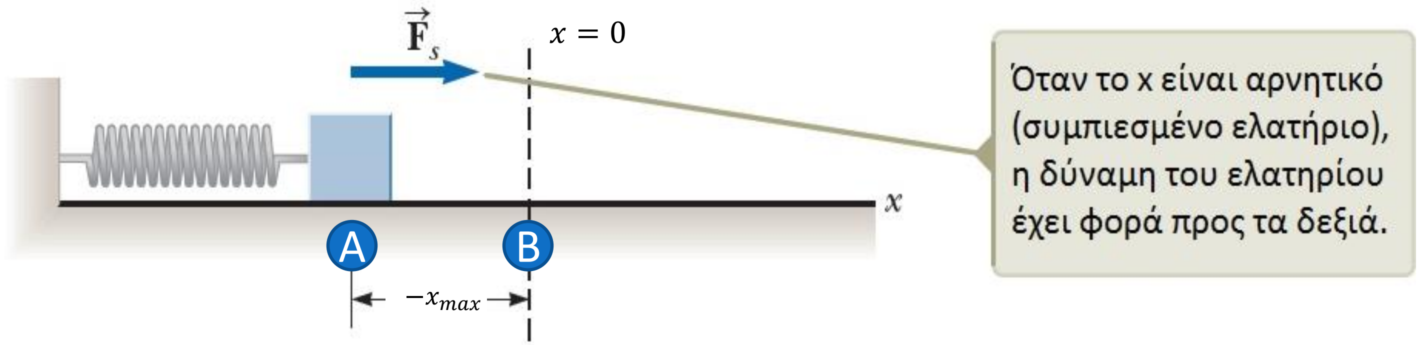
- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Η τιμή της σταθεράς k είναι μια ένδειξη της σκληρότητας του ελατηρίου
    - Μεγάλο k → σκληρό ελατήριο
    - Μικρό k → μαλακό ελατήριο
  - Μονάδες της σταθεράς k είναι $\boldsymbol{N/m}$
  - Διανυσματική μορφή για οριζόντια κίνηση

$$\vec{F}_s = F_s\vec{\boldsymbol{i}} = -kx\vec{\boldsymbol{i}}$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται στη μέγιστη τιμή (θέση $x_i = x_A = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο.



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = 0$ (θέση ισορροπίας)

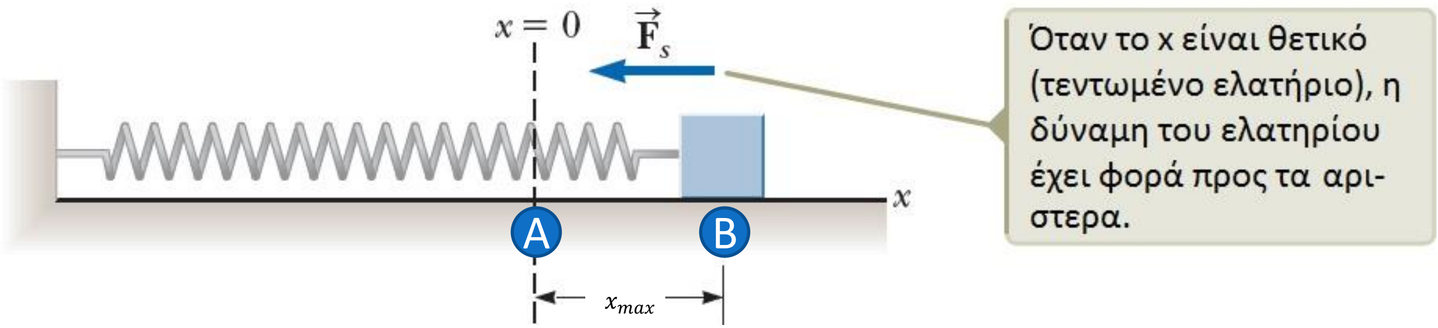
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\vec{\imath}) = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{-x_{max}}^{0} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του, περνώντας από τη θέση ισορροπίας (θέση $x_i = x_A = 0$)



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = x_{max}$

- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\boldsymbol{i}}) \cdot (dx\vec{\boldsymbol{i}}) = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Άρα το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα **για μετατόπιση από $-x_{max}$ ως x_{max}** είναι μηδέν!!
  - Το ίδιο ισχύει για οποιεσδήποτε συμμετρικές ως προς το μηδέν θέσεις

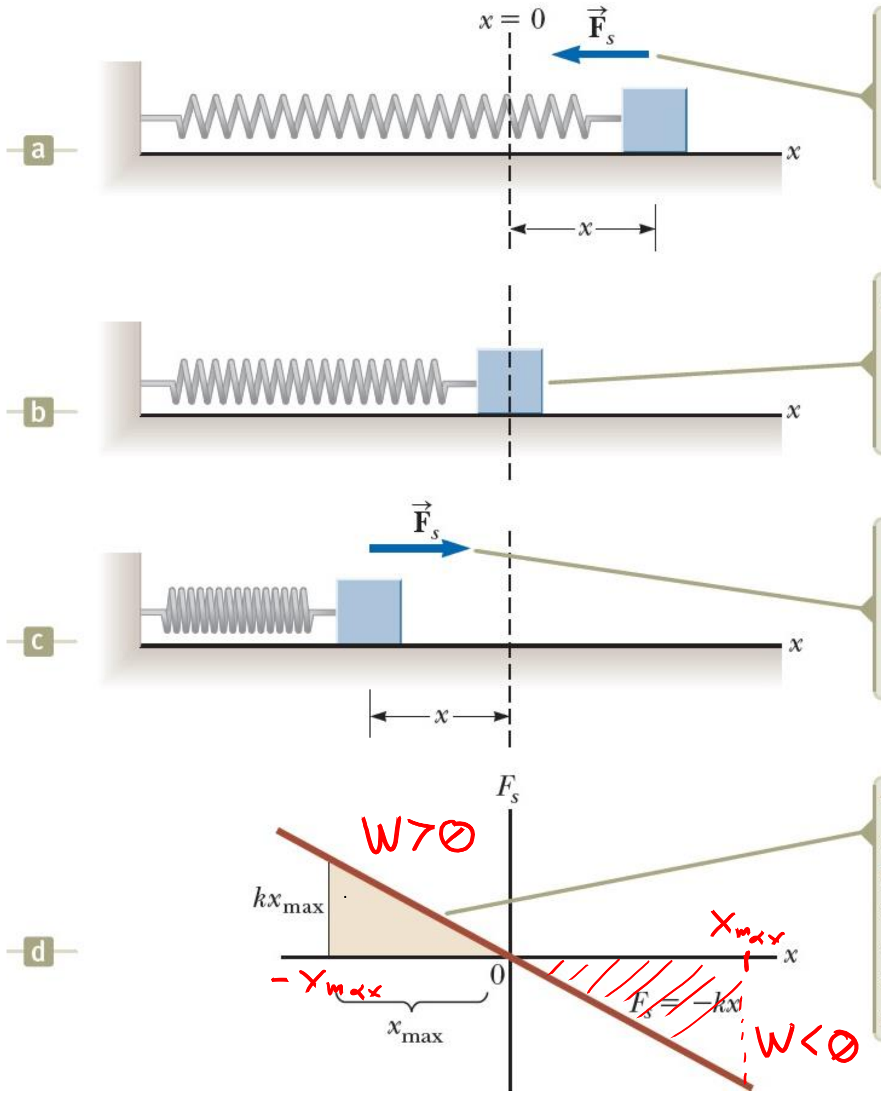
- Όμως για μια **οποιαδήποτε** μετατόπιση από μια θέση x_i σε μια θέση x_f, ισχύει:

$$\boxed{W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2}$$

που δεν είναι απαραίτητα ίσο με το μηδέν…

- Η παραπάνω σχέση δίνει το **έργο της δύναμης του ελατηρίου από μια οποιαδήποτε θέση ως μια οποιαδήποτε άλλη**

Ενέργεια Συστήματος



Όταν το x είναι θετικό (τεντωμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα αρι- στερα.

Όταν το x είναι μηδέν (στο φυσικό μήκος του ελατηρίου), η δύναμη του ελατηρίου είναι μηδέν.

Όταν το x είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα δεξιά.

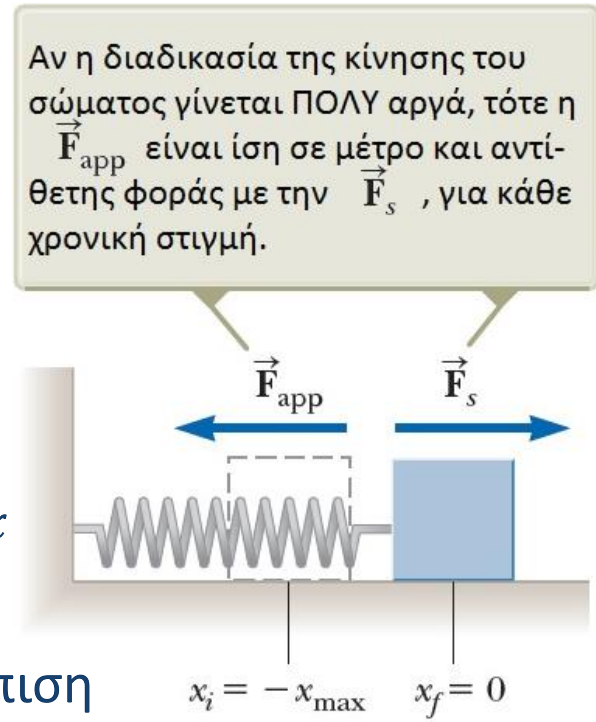
Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου επάνω στο σώμα, όσο αυτό κινείται από $-x_{max}$ στο 0, είναι το εμβαδόν της γραμμοσκι- ασμένης περιοχής: $\frac{1}{2}kx_{max}^2$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω μια <u>εξωτερική</u> δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο σχήμα
  - Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0
- $W_{ext} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int -\vec{F}_s \cdot d\vec{x}$

$$= \int_{x_i}^{x_f} -(-kx\boldsymbol{\vec{\imath}}) \cdot (dx\,\boldsymbol{\vec{\imath}})$$

$$= \int_{-x_{max}}^{0} kxdx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$



- Όμοια με πριν, για οποιαδήποτε μετατόπιση

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kxdx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = -W_s$$

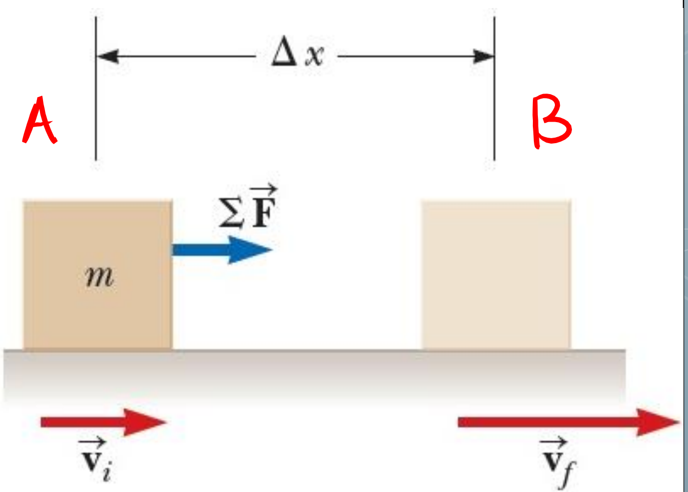
Ενέργεια Συστήματος

- **Έργο = Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας**
  - Τι γίνεται αυτή η ενέργεια;
  - ***Πιθανότατα*** αλλάζει την ταχύτητα ενός σώματος

- 1^{ος} Τύπος Ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα:

Κινητική Ενέργεια

- Έστω το διπλανό παράδειγμα:
  - Σύστημα = {σώμα μάζας m}
    - Σώμα επιταχύνει από $\vec{u}_i$ σε $\vec{u}_f$
    - Σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης (**μοντέλο κίνησης I**)



Ενέργεια Συστήματος

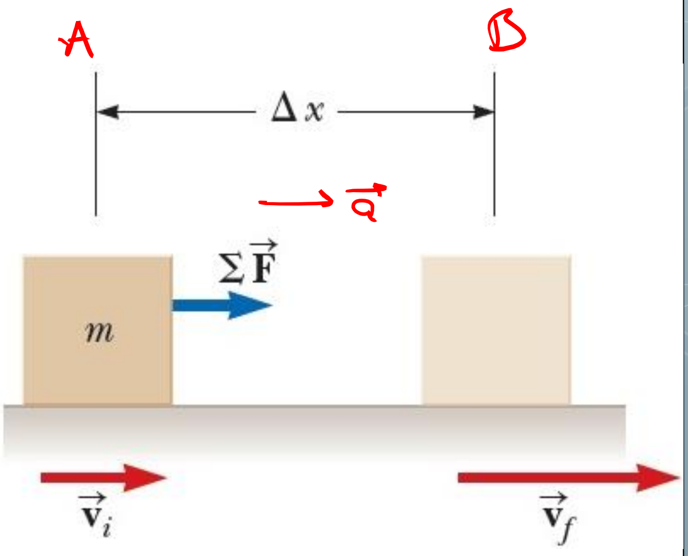
- Θεωρήστε την συνισταμένη των δυνάμεων σταθερή
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση (**μοντέλο κίνησης ΙΙ**)
- Άρα

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta\mathrm{x} \Leftrightarrow a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta\mathrm{x}}$$

- Από 2ο νόμο Newton, είναι

$$\sum F = ma$$

και με αντικατάσταση έχουμε



Ενέργεια Συστήματος

$$\sum F = m\frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \Leftrightarrow \overbrace{\Sigma F\Delta x}^{W_F} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

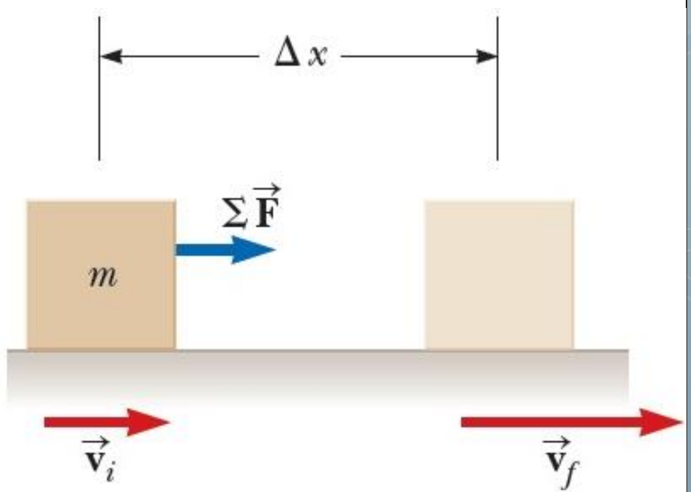
- Το 1ο μέλος είναι ο ορισμός του έργου σταθερής δύναμης
- Άρα

$$W_{ext} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

όπου

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mu^2}$$

η ***κινητική ενέργεια*** του σώματος



Ενέργεια Συστήματος

- Η κινητική ενέργεια αναπαριστά την ενέργεια που σχετίζεται με την **κίνηση** ενός σώματος
  - Μονάδα μέτρησης στο SI:

$$kg \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^2 = kg \cdot \left(\frac{m}{s^2}\right) \cdot m = N \cdot m = 1\,Joule\ (J)$$

- Συνοψίζοντας:

$$\boxed{\boldsymbol{W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K}}$$

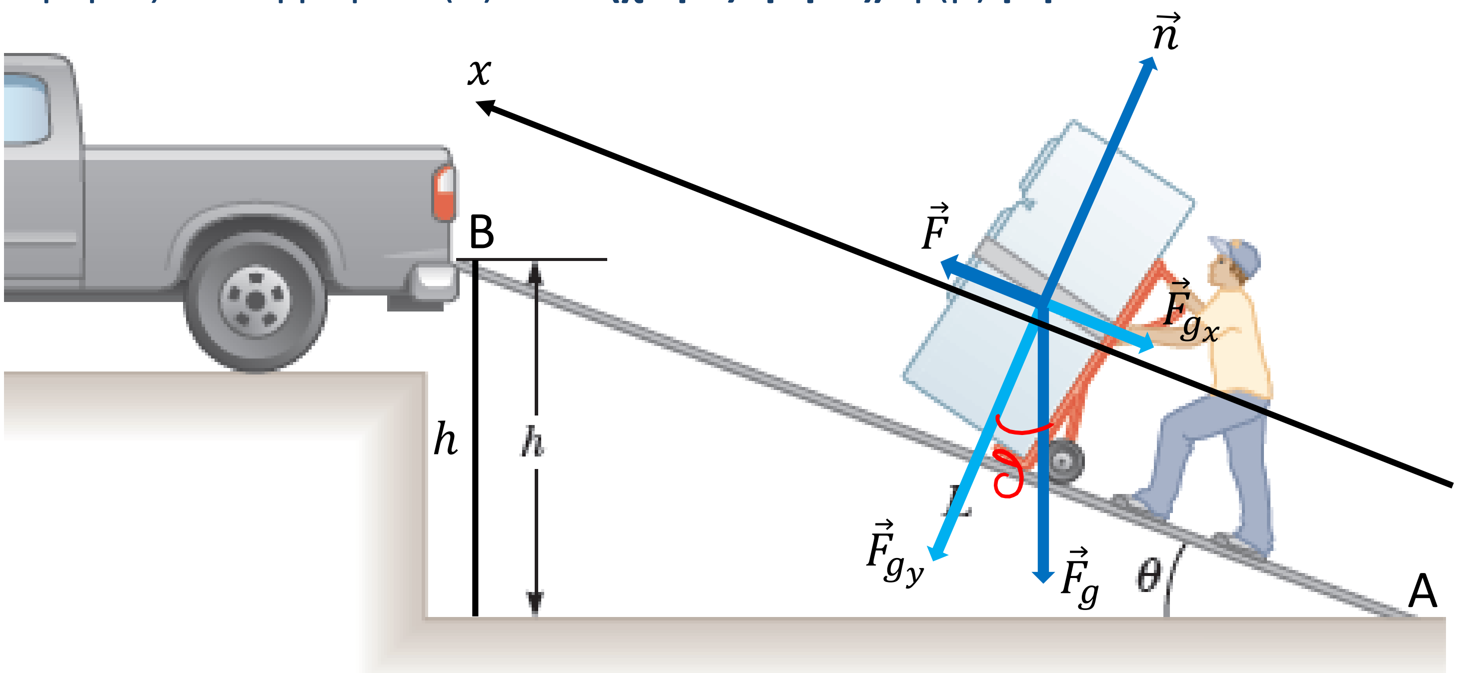
1ο Ενεργειακό Θεώρημα!

- **<u>Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου</u>**
  - **Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων, και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά το μέτρο της ταχύτητας του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος**

Ενέργεια Συστήματος

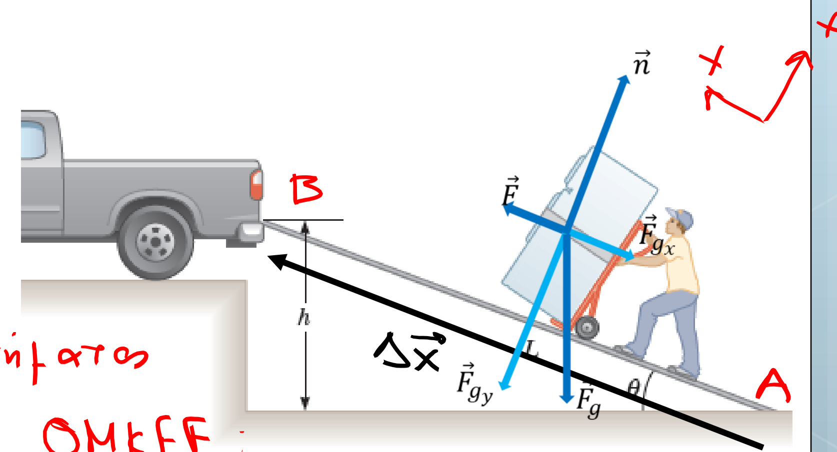
$$\Sigma F_x = 0$$

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Ο φίλος σας θέλει να ανεβάσει το ψυγείο του **<u>με σταθερή ταχύτητα</u>** σε ένα φορτηγό χρησιμοποιώντας μια ράμπα υπό γωνία θ όπως στο Σχήμα. Ισχυρίζεται ότι θα απαιτηθεί λιγότερο έργο από μέρους του αν το μήκος της ράμπας L αυξηθεί. Έχει δίκιο; Θεωρήστε ως σύστημα το ψυγείο με το καρότσι μεταφοράς και τη ράμπα (α) **λεία (χωρίς τριβές)** ή (β) **μη λεία**.



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



(α) Θεωρούμε ως σύστημα το {ψυγείο}. Όλες οι δυνάμεις του σχήματος είναι εξωτερικές. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕΕ:

$$K_B - K_A = W_{ext} = W_{\vec n} + W_{\vec F} + W_{\vec F_{gy}} + W_{\vec F_{gx}}$$

$$0 = W_{\vec n} + W_{\vec F} + W_{\vec F_{gy}} + W_{\vec F_{gx}}$$

, γιατί η άνοδος γίνεται με σταθερή ταχύτητα! Άρα

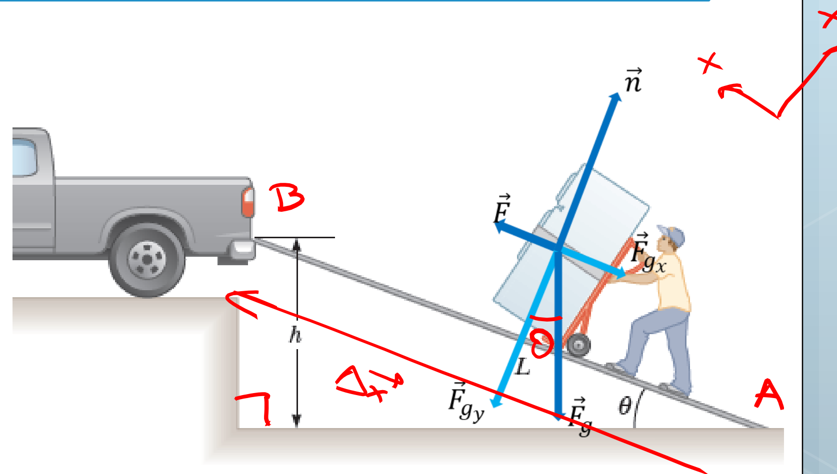
$W_{\vec F} + W_{\vec F_{gx}} + W_{\vec F_{gy}} + W_{\vec n} = 0$. Όμως $\vec n \perp \Delta\vec x$, $\vec F_{gy} \perp \Delta\vec x$,

άρα $W_{\vec n} = W_{\vec F_{gy}} = 0$! Οπότε $W_{\vec F} + W_{\vec F_{gx}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow W_{\vec F} = -W_{\vec F_{gx}} = -\left(F_{gx}\cdot \Delta x\, \overset{=1}{\cancel{\cos(\pi)}}\right) = +F_{gx}\cdot \Delta x$$

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Δηλ. $W_F = F_{g_x} \cdot \Delta x$

$= mg\sin\theta \cdot \Delta x$

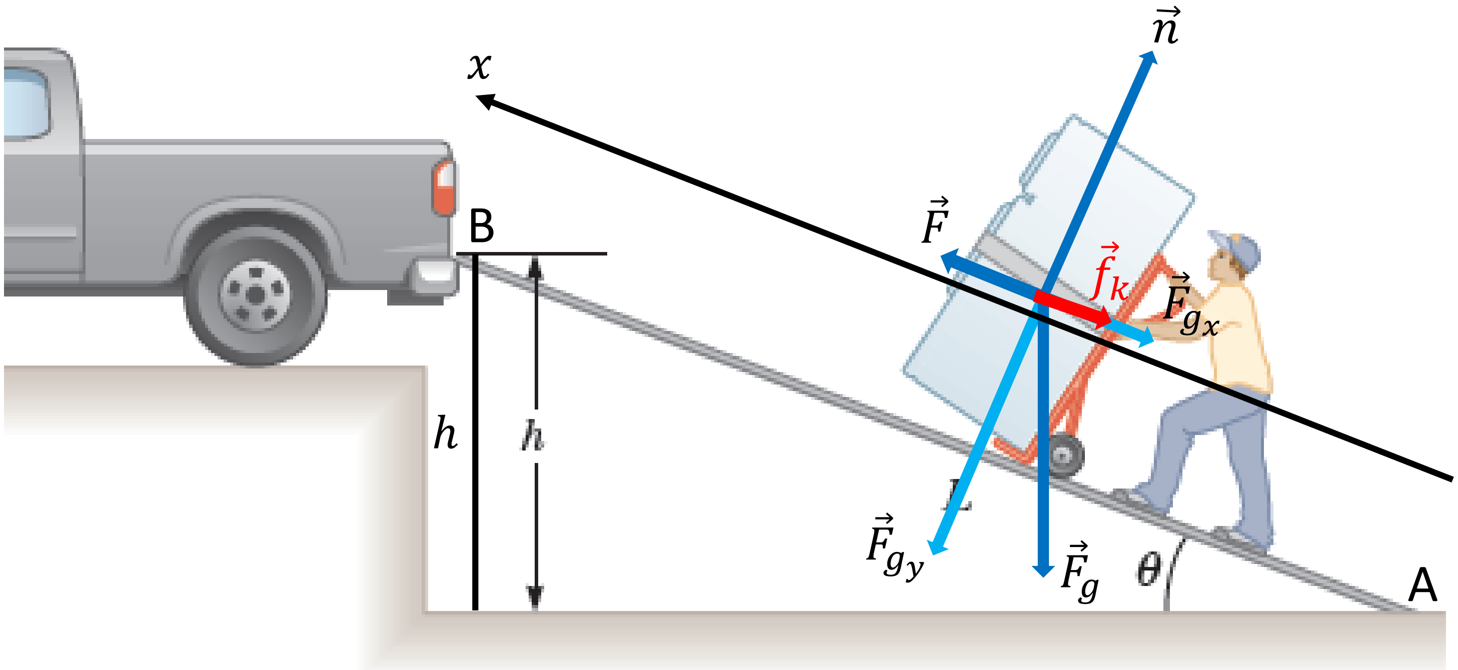
$= mg\sin\theta \cdot L = mgh$

γιατί $\sin\theta = \dfrac{h}{L} \Rightarrow h = \sin\theta \cdot L$. Άρα ο ισχυρισμός του είναι λάθος!

Το έργο που θα παράξει, απουσία τριβών, είναι πάντα ανεξ. του L! Εξαρτάται μόνο από τη μάζα m του ψυγείου και το ύψος h που θέλει να το ανεβάσει!

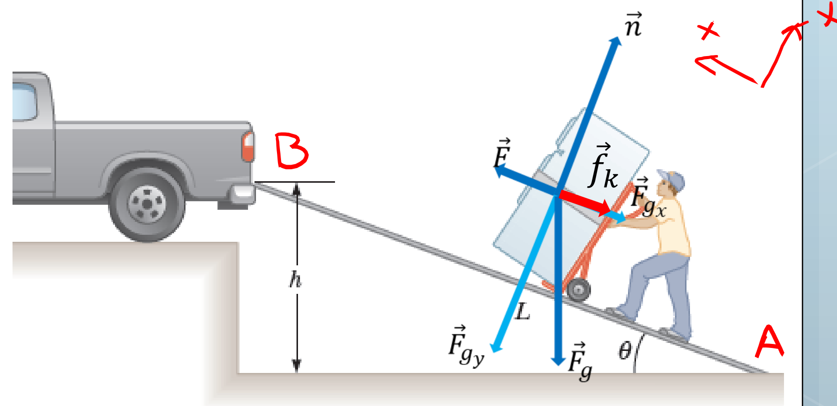
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



(β) Ακριβώς όμοια με το (α) θα είχαμε:

$$K_B - K_A = W_{\vec{F}} + W_{\vec{F}_{gx}} + W_{\vec{F}_{gy}} + W_{\vec{n}} + W_{\vec{f}_k}$$

$$0 = W_{\vec{F}} + W_{\vec{F}_{gx}} + 0 + 0 + W_{\vec{f}_k}$$, για τους ίδιους λόγους με πριν. Άρα

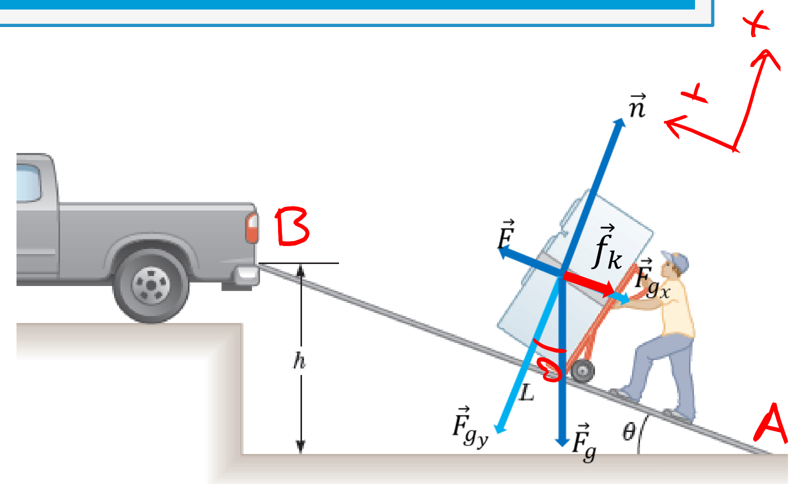
$$W_{\vec{F}} = -W_{\vec{F}_{gx}} - W_{\vec{f}_k} = -mg\sin\theta \cdot \Delta x \cdot \overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}} - \mu_k n \cdot \Delta x \cdot \overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}}$$

$$= mg\sin\theta\, \Delta x + \mu_k n \Delta x \quad (1)$$

Όμως το ψυγείο κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα ισορροπεί!

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Ισχυει ο 1ος Ν. Newton και στους δυο άξονες:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \Rightarrow n - F_{g_y} = 0 \Leftrightarrow n = mg\cos\theta \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} W_F = mg\sin\theta\cdot\Delta x + \mu_k mg\cos\theta\cdot\Delta x$$

$$\overset{\Delta x = L}{=} mg\underbrace{L\sin\theta}_{h} + \mu_k mg\cos\theta\cdot L$$

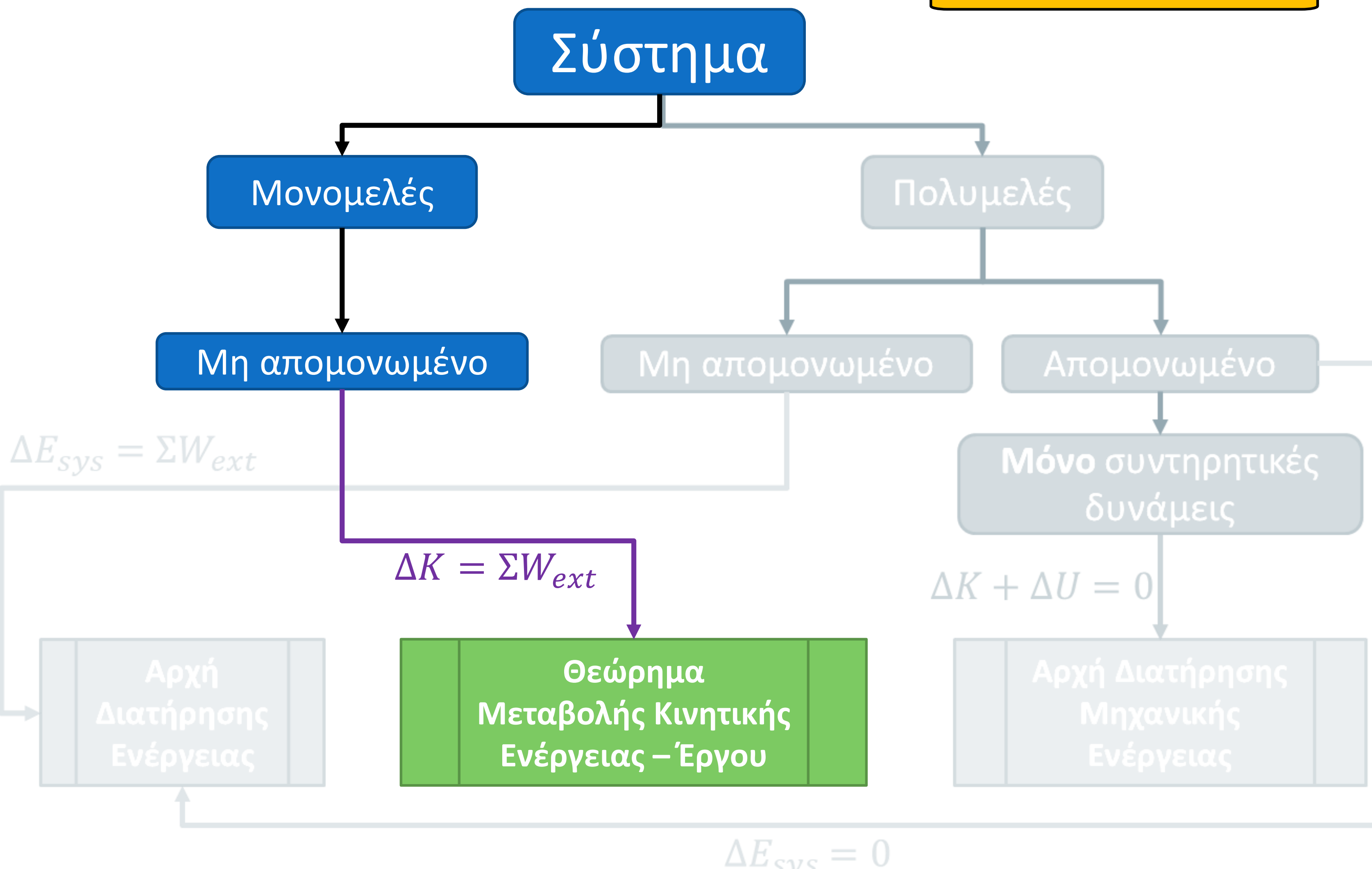
$$= mgh + \mu_k mg\cos\theta\cdot L$$

$$= mg(h + \mu_k\cos\theta\cdot L) \quad !$$

Παρατηρούμε ότι το έργο της $\vec{F}$ εξαρτάται τώρα από το L.

Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



Συνεχίζεται... ☺